JOURNAL OF ADVANCED SCIENTIFIC RESEARCH

ISSN: 0976-9595

Journal of Advanced Scientific Research (ISSN: 0976-9595)
Vol.3. Issue 12 page 23
Impactfactorsearch 8.4

Editorial Team

C/O Advanced Scientific Research,
8/21 Thamotharan Street,
Arisipalayam, Salem

Journal of Advanced Scientific Research (ISSN: 0976-9595)
Vol.3. Issue 12 page 24
Impactfactorsearch 8.4

INVERSE PROBLEM FOR A SYSTEM OF POROELASTICITY EQUATIONS

Khuzhaev Lochin Khusanovich.
Tashkent University of Information Technologies Karshi branch
Yangiboev Zoyir Shoberdievich.
Karshi State University

Abstract: The work is devoted to the study of the solvability of the inverse problem with an unknown nonstationary coefficient for the lowest term of the system of poroelasticity equations and the uniqueness of its solution. The problem is considered in a rectangular area. To find the unknown factor, the conditions of a direct initial-boundary value problem and the conditions for redefining the integral are necessary. When proving solvability, the methods of continuation with respect to a parameter, fixed point, truncation and regularization are used.

Keywords: inverse problem; systems of equations; Darcy coefficient; partial density; regularization; porous medium.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПОРОУПРУГОСТИ

Хужаев Лочин Хусанович.
Ташкентский университет информационных технологий Каршинский филиал
Янгибоев Зойир Шобердиевич.
Каршинский государственный университет

Аннотация: Работа посвящена исследованию разрешимости обратной задачи с неизвестным нестационарным коэффициентом при младшем члене системы уравнений пороупругости и единственности ее решения. Задача рассматривается в прямоугольной области. Для нахождения неизвестного множителя необходимы условия прямой начально-краевой задачи и условия переопределения интеграла. При доказательстве разрешимости используются методы продолжения по параметру, фиксированной точки, обрезания и регуляризации.

Ключевые слова: обратная задача; системы уравнений; коэффициент Дарси; частичная плотность; регуляризация; пористая среда.

Под обратными задачами для системы уравнений пороупругости понимаются задачи определения коэффициентов, правых частей уравнений, начальных или граничных условий по некоторым функционалам от решений прямых задач. Широкий круг обратных задач математической физики включает в себя такие задачи как обратная кинематическая задача сейсмики, обратная задача теории потенциала, обратная задача Штурма-Лиувилля, задача определения одного или нескольких коэффициентов уравнения с частными производными. В случае, если в обратной задаче неизвестными являются решение и правая часть, то такая обратная задача будет линейной; если же

Journal of Advanced Scientific Research (ISSN: 0976-9595)
Vol.3. Issue 12 page 25
Impactfactorsearch 8.4
неизвестными являются решение и хотя бы один из коэффициентов, то обратная задача будет нелинейной [11-13].

Пусть D есть интервал $(0,1)$, Q есть прямоугольник $\{(x,t): x\in D, t\in(0,T), 0<T<+\infty\}$. Далее, пусть $a(x)$, $f(x,t)$, $K(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ и $\mu(t)$ есть функции, заданные при $x\in[0,1]$, $t\in[0,T]$.

Обратная задача B_s. Найти функции $u(x,t)$, $v(x,t)$ и $s(t)$, связанные в прямоугольнике Q системой уравнений [6-7]

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \gamma b(u_t - v_t) + s(t)a(x)u = f(x,t) \\ v_{tt} - b(u_t - v_t) = f(x,t) \end{cases}, \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ граничных условий

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ 0<t<T, \tag{2}$$

и выполнении для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ начальных условий

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x\in D \\ v(x,0) = 0,\ v_t(x,0) = 0, & x\in D \end{cases}, \tag{3}$$

при дополнительном условии

$$\int_0^1 K(x,t)u(x,t)\,dx = \mu(t), \quad 0<t<T. \tag{4}$$

В системе (1) $u(x,t)$ и $v(x,t)$- компоненты скорости смещений упругого пористого тела и насыщающей жидкости с соответствующими постоянными парциальными плотностями ρ_s и ρ_l. b- коэффициент Дарси, $\gamma=\rho_l/\rho_s$, функция вида $s(t)a(x)$ отвечает за диссипацию энергии в системе. Далее для простоты считаем, что скорость распространения сдвиговой волны постоянна и равна единице, будем считать, что $a(1)=1$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$\tilde{\delta}\sqrt{\tilde{\beta}T}<2,\quad a(x)\in C^1[0,1],\ K(x,t)\in C^2(\bar{Q}),\ \mu(t)\in C^2[0,T];$$

$$\mu(t)\ \ge \mu_1 > 0\ \textit{при}\ t\in[0,T];\ \frac{2N_5\sqrt{\tilde{\beta}}}{2-\tilde{\delta}\sqrt{\tilde{\beta}T}} \le \mu_0,$$

$$\int_0^1 K(x,0)u_0(x)dx = \mu(0),\quad \int_0^1 K(x,0)u_1(x)dx + \int_0^1 K_t(x,0)u_0(x)dx = \mu'(0).$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t)\in L_2(Q)$, $f_t(x,t)\in L_2(Q)$, *и для любых функций* $u_0(x)$ *и* $u_1(x)$ *таких, что* $u_0(x)\in H^2(D)\cap\overset{0}{H^1}(D)$, $u_1(x)\in\overset{0}{H^1}(D)$ *обратная задача* B_s *имеет решение* $\{u(x,t), s(t)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in V_0$, $v(x,t)\in L_\infty\left(0,T;H^2(D)\cap\overset{0}{H^1}(D)\right)$, $v_t(x,t)\in L_\infty\left(0,T;\overset{0}{H^1}(D)\right)$, $v_{tt}(x,t)\in L_2(Q)$, $s(t)\in L_\infty[0,T]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U(x,t)$, $V(x,t)$ есть заданные функции. Определим функции $\phi_1(t,U)$, $\psi_1(t,U)$ и $s_1(t,U)$:

Journal of Advanced Scientific Research (ISSN: 0976-9595)
Vol.3. Issue 12 page 26
Impactfactorsearch 8.4

$$\phi_1(t,U) = 2\int_0^1 K_t(x,t)U_t(x,t)dx + \int_0^1 \left(K_{tt}(x,t) + \gamma b K_t(x,t)\right)U(x,t)dx -$$

$$-K(0,t)U_x(0,t) + K(1,t)U_x(1,t) + \int_0^1 K_{xx}(x,t)U(x,t)dx +$$

$$+\gamma b^2 \int_0^1 K(x,t)\int_0^t U_\eta(x,\eta)\exp[-b(t-\eta)]d\eta dx\,,$$

$$\psi_1(t,U) = \int_0^1 K(x,t)U(x,t)dx - \int_0^1 a_x(x)\left(\int_0^x K(y,t)U_t(y,t)dy\right)dx\,,$$

$$s_1(t,U) = \frac{G(t) - \mu''(t) + \phi_1(t,U)}{\mu(t) - \psi_1(t,U)}\,.$$

Рассмотрим начально-краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + \gamma b u_t - \gamma b^2 \int_0^t u_\eta(x,\eta)\exp[-b(t-\eta)]d\eta + s_1(t,u)a(x)u = g(x,t) \qquad (1')$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) и

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in D \qquad (3')$$

В формуле $(1')$

$$g(x,t) = f(x,t) + \gamma b \int_0^t f(x,\eta)\exp[-b(t-\eta)]d\eta\ .$$

Для доказательства разрешимости этой краевой задачи мы воспользуемся методом срезки, методом регуляризации и методом неподвижной точки.

Определим срезающие функции $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ — с помощью чисел N_5 и μ_0 соответственно:

$$G_1(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если} |\xi| \le N_5, \\ N_5, & \text{если} |\xi| > N_5, \end{cases} \qquad G_2(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если} |\xi| \le \mu_0, \\ \mu_0, & \text{если} |\xi| > \mu_0. \end{cases}$$

Определим далее функцию $\tilde{s}_1(t,U)$ - с помощью функций $G_1(\xi)$ и $G_2(\xi)$ - так же, как в [9]:

$$\tilde{s}_1(t,U) = \frac{G(t) - \mu''(t) + G_1(\phi_1(t,U))}{\mu(t) - G_2(\psi_1(t,U))}\,.$$

Рассмотрим уравнение

Journal of Advanced Scientific Research (ISSN: 0976-9595)
Vol.3. Issue 12 page 27
Impactfactorsearch 8.4

$$u_{tt}-u_{xx}+\gamma b u_t-\gamma b^2\int_0^t u_\eta(x,\eta)\exp\left[-b(t-\eta)\right]d\eta+s_1(t,u)a(x)u=\varepsilon u_{xxt}+g\left(x,\,t\right) \qquad (1'_\varepsilon)$$

с параметром $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0>0$ - некоторая постоянная и начально-краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения ($1'_\varepsilon$) и такую, что для нее выполняются условия (2) и ($3'$).

Используя метод неподвижной точки и теорему Шаудера, нетрудно установить, что краевая задача ($1'_\varepsilon$), (2), ($3'$) имеет при некотором ε и при выполнении условий теоремы 1 решение $u^\varepsilon\left(x,\,t\right)$, принадлежащее пространству V_1. Делается это так же, как доказана разрешимость начально-краевой задачи ($1''_{\varepsilon,U}$), (2), (3) из [9]. Покажем, что для семейства функций $\left\{u^\varepsilon\left(x,\,t\right)\right\}$ имеют место «хорошие» априорные оценки. Для удобства индекс «ε» у решений временно опустим. Рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_0^1[u_{\tau\tau}-u_{xx}+\gamma b u_\tau-\gamma b^2\int_0^\tau u_\eta(x,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta+\tilde{s}_1(\tau,u)a(x)u]u_\tau\,dx\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^1\left[\varepsilon u_{xx\tau}+g\left(x,\,\tau\right)\right]u_\tau\,dx\,d\tau. \qquad (5)$$

Заметим, что имеет место неравенство [15]

$$\left|\tilde{s}_1\left(\tau,U\right)\right|\le N_4+N_3\left(\int_0^1\left[U_t^2(x,t)+U_x^2(x,t)+U_{xx}^2(x,t)\right]dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6)$$

Интегрируя слева в равенстве (5) по частям, используя неравенство Юнга и неравенство (6), нетрудно от равенства (5) перейти к неравенству

$$\int_0^1 u_t^2(x,t)dx+\int_0^1 u_x^2(x,t)dx+2\gamma b\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2(x,\tau)dxd\tau+\varepsilon\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2(x,\tau)dxd\tau\le$$

$$\le(1+2\gamma b^2)\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2(x,\tau)dxd\tau+2N_4\int_0^t\int_0^1\left[u_t^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)+u_{xx}^2(x,\tau)\right]dxd\tau+$$

$$+N_3\int_0^t\left(\int_0^1\left[u_\tau^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)+u_{xx}^2(x,\tau)\right]dx\right)^{\frac{3}{2}}d\tau+M_1.$$

Далее в силу положительности постоянных γ и b имеем

$$\int_0^1 u_t^2(x,t)dx+\int_0^1 u_x^2(x,t)dx+\varepsilon\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau}^2(x,\tau)dxd\tau\le$$

$$\le(1+2\gamma b^2)\int_0^t\int_0^1 u_\tau^2(x,\tau)dxd\tau+2\tilde{N}_6\int_0^t\int_0^1\left[u_\tau^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)+u_{xx}^2(x,\tau)\right]dxd\tau+$$

$$+N_3\int_0^t\left(\int_0^1\left[u_\tau^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)+u_{xx}^2(x,\tau)\right]dx\right)^{\frac{3}{2}}d\tau+M_1\,. \tag{7}$$

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_0^1[u_{\tau\tau}-u_{xx}+\gamma bu_\tau-\gamma b^2\int_0^\tau u_\eta(x,\eta)\exp\left[-b(\tau-\eta)\right]d\eta+\tilde{g}_1(\tau,u)a(x)u]u_{\tau xx}\,dx\,d\tau=$$

$$=\int_0^t\int_0^1\left[\varepsilon u_{xx\tau}+g\left(x,\,\tau\right)\right]u_{\tau xx}\,dx\,d\tau.$$

Вновь интегрируя по частям — как слева, так и справа, используя далее неравенство Юнга и неравенство (7), получим следующее неравенство

$$\int_0^1 u_{tx}^2(x,t)dx+\int_0^1 u_{xx}^2(x,t)dx+\varepsilon\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2(x,\tau)dxd\tau\le$$

$$\le 2\int_0^t\int_0^1 u_{xx}^2(x,\tau)dxd\tau+4N_4\int_0^t\int_0^1\left[u_x^2(x,\tau)+u_{x\tau}^2(x,\tau)\right]dxd\tau+$$

$$+4N_3\int_0^t\left(\int_0^1\left[u_\tau^2(x,\tau)+u_x^2(x,\tau)+u_{xx}^2(x,\tau)\right]dx\right)^{\frac{3}{2}}d\tau+M_2\,. \tag{8}$$

Обозначим

$$z(t)=\int_0^1\left[u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)+u_{xx}^2(x,t)\right]dx\,.$$

Объединяя неравенства (7) и (8), мы придем к неравенству

$$z(t)\le 3(2\tilde{N}_6+2\gamma b^2+1)\int_0^t z(\tau)d\tau+6N_3\int_0^t z^{\frac{3}{2}}(\tau)d\tau+M_3. \tag{9}$$

Очевидное неравенство $3y(t)\le 2y^{3/2}(t)+1$ дает возможность упростить неравенство (9) и перейти к неравенству

$$z(t)\le\tilde{\alpha}\int_0^t z^{\frac{3}{2}}(\tau)d\tau+\tilde{\beta}.$$

Journal of Advanced Scientific Research (ISSN: 0976-9595)
Vol.3. Issue 12 page 29
Impactfactorsearch 8.4

Свойства решений интегральных неравенств дают для функции $z(t)$ оценку $z(t) \le z_0(t)$, где функция $z_0(t)$ определяется, как решение задачи Коши

$$z_0'(t) = \tilde{\alpha} z_0^{\frac{3}{2}}(t), \qquad z_0(0) = \tilde{\beta}.$$

Решение $z_0(t)$ имеет вид

$$z_0(t) = \frac{4\tilde{\beta}}{(2 - \tilde{\alpha}\sqrt{\tilde{\beta}}\, t)^2}.$$

Следовательно, для решения начально-краевой задачи ($1'_\varepsilon$), (2), ($3'$) имеет место априорная оценка

$$z(t) \le \frac{4\tilde{\beta}}{(2 - \tilde{\alpha}\sqrt{\tilde{\beta}}\, T)^2}. \tag{10}$$

Из этой оценки и из условий теоремы 1 вытекают равенства

$$G_1(\phi_1(t,u)) = \phi_1(t,u), \quad G_2(\psi_1(t,u)) = \psi_1(t,u), \quad \tilde{s}_1(t,u) = s_1(t,u).$$

Далее, помимо оценки (10), для решений краевой задачи ($1'_\varepsilon$), (2), ($3'$) можно показать также, как в [10, 11] выполняется следующая оценка

$$\int_0^t\int_0^1 u_{\tau\tau}^2(x,\tau)dxd\tau + \varepsilon\int_0^t\int_0^1 u_{xx\tau}^2(x,\tau)dxd\tau \le M_4. \tag{11}$$

с постоянной M_4, зависящей лишь функций $a(x)$, $K(x,t)$, $f(x,t)$, $\mu(t)$, $u_0(x)$ и $u_1(x)$, а также числами b, γ и T.

Из оценок (10) и (11) следует, что из семейства решений $\{u^\varepsilon(x,t)\}$ краевой задачи ($1'_\varepsilon$), (2), ($3'$) можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к решению $u(x,t)$ краевой задачи ($1'$), (2), ($3'$). Доказывается это так же, как доказывалось существование решения краевой задачи (1), (2), (3) из [9]. Имея решение $u(x,t)$, определим функцию $s(t)$:

$$s(t) = s_1(t,u).$$

Очевидно, что функции $u(x,t)$ и $s(t)$ принадлежат требуемым классам и что для них выполняется уравнение ($1'$).

Journal of Advanced Scientific Research (ISSN: 0976-9595)
Vol.3. Issue 12 page 30
Impactfactorsearch 8.4

Выполнение условия (4) для функции $u(x,t)$ доказывается так же, как доказывалось выполнение условия (4) для решений начально-краевой задачи (1), (2), (3) из [9]. Теорема полностью доказана.

Определим множество W_2:

$$W_2=\{\{u(x,t),s(t)\} \ : u(x,t)\in V_0,\, s(t)\in L_\infty[0,T],$$

$$\mu(t) - \psi_1(t,u) \ge \tilde{k}_0 > 0, \text{ при } t\in[0,T]\}.$$

Теорема 2. *Пусть для функций* $a(x)$, $f(x,t)$, $K(x,t)$ *и* $\mu(t)$ *выполняются условия теоремы 1. Тогда в множестве* W_2 *обратная задача* B_s *не может иметь более одного решения.*

Доказательство теоремы 2 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 2 из [12].

Литература

1. Алексеев А.С. Некоторые обратные задачи теории распространения волн // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 11-12. с.1514-1531.

2. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосибирск, Наука, 1972.

3. Бухгейм А.Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. Новосибирск: Наука, 1983. - 207 с.

4. Алексеев А.С., Имомназаров Х.Х., Грачев Е.В., Рахмонов Т.Т., Имомназаров Б.Х. Прямые и обратные динамические задачи для системы уравнений континуальной теории фильтрации // Сиб.ЖИМ. 2004. т.VII. № 1(17). с.3-8.

5. Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах, М., Научный мир, 2005.

6. Имомназаров Х.Х., Янгибоев З.Ш. Регуляризация в обратной динамической задачи для уравнения SH волн в пористой среде // Узбекский Математический Журнал 2011. №3. с.73-87.

7. Имомназаров Х.Х., Холмуродов А.Э. Моделирование и исследование прямых и обратных динамических задач пороупругости. Изд. Университет, Ташкент, 2017, 120с.

8. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, Мир, М., 1971.

9. Imomnazarov Kh.Kh., Khujaev L.Kh., Yangiboev Z.Sh. The inverse problem for the system of equations of poroelasticity: the case of an unknown coefficient with a younger term, depending on time. // Philosophical Readings XIII.4 (2021), pp. 796-808.

10. Валитов И.Р., Кожанов А.И. Обратные задачи для гиперболических уравнений: случай неизвестных коэффициентов, зависящих от времени // *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, 2006, т. 6, № 1, с. 43–59.
11. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения, Мир, М., 1971.
12. Savateev E.G. An inverse problem for the Burger's equation and its hyperbolic Regularization // J. of Inverse and Inverse and Ill–Posed Problems, 1993, v. 1, № 3, pp. 231– 244.
13. Имомназаров Х.Х., Имомназаров Ш.Х., Рахмонов Т.Т., Янгибоев З.Ш. Регуляризация в обратных динамических задачах для уравнения SH волн в пористой среде // Владикавказский математический журнал, 2013, т.15, №2. с. 46-58.